# Représentations induites d'algèbres de Hecke affines et singularités de $R$-matrices

Bernard Leclerc et Jean-Yves Thibon

**Résumé** — Nous donnons un critère explicite d'irréductibilité pour des produits d'induction de modules d'évaluation d'algèbres de Hecke affines de type A. Ce critère permet de déterminer la forme des zéros et des pôles de la $R$-matrice trigonométrique associée à une représentation d'évaluation de $U_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$.

## Induced representations of affine Hecke algebras and singularities of $R$-matrices

**Abstract** — *We give an explicit criterion for the irreducibility of some induction products of evaluation modules of affine Hecke algebras of type A. This allows to describe the form of the zeros and poles of the trigonometric R-matrix associated to any evaluation module of* $U_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$.

**Abridged english version** — Let $\widehat{H}_n(u)$ be the affine Hecke algebra associated to $GL(n)$ and $H_n(u)$ its finite-dimensional subalgebra of type $A_{n-1}$. We assume that the parameter $u \in \mathbb{C}^*$ is not a root of unity. The simple $H_n(u)$-modules $S_\lambda$ are parametrized by partitions $\lambda$ of $n$. Let $S_\lambda(z)$ be the $\widehat{H}_n(u)$-module obtained from $S_\lambda$ by evaluation at $z \in \mathbb{C}^*$. Write $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ and $\lambda' = (l_1, \ldots, l_k)$ (the conjugate of $\lambda$). Let

$$\mathcal{E}_\lambda = \{e = \lambda_i + l_j - i - j + 1,\ 1 \le i \le r,\ 1 \le j \le k\}$$

denote the set of hook-lengths of $\lambda$ and set $\mathcal{Z}_\lambda = \{u^{\pm e},\ e \in \mathcal{E}_\lambda\}$. Given finite-dimensional $\widehat{H}_{n_i}(u)$-modules $M_i,\ i = 1, 2$, we write $M_1 \odot M_2$ for the induction product of $M_1$ and $M_2$ (this is then an $\widehat{H}_{n_1+n_2}(u)$-module).

**Theorem 1** *Let $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}^*$. The module $S_\lambda(z_1) \odot \cdots \odot S_\lambda(z_m)$ is simple if and only if $z_j/z_i \notin \mathcal{Z}_\lambda$ for all $i$, $j$.*

The proof of Theorem 1 is reduced to a problem of canonical bases in the following way. Let $R_n$ be the complexified Grothendieck group of the category $\mathcal{C}_n$ of $\widehat{H}_n(u)$-modules for which the generators $y_i$ of the maximal commutative subalgebra have eigenvalues of the form $u^k,\ k \in \mathbb{Z}$. By Zelevinsky's classification [13], the simple modules $L_{\mathbf{m}}$ of $\mathcal{C}_n$ are parametrized by the multisegments $\mathbf{m} = \sum_{i \le j} m_{ij}[i,j]$ over $\mathbb{Z}$ such that $\sum_{i<j} m_{ij}(j-i+1) = n$. Let $R = \bigoplus_{n \ge 0} R_n$. Following Zelevinsky we consider $R$ as a bialgebra with multiplication and comultiplication corresponding respectively to induction and restriction with respect to the maximal parabolic subalgebras $\widehat{H}_k(u) \otimes \widehat{H}_{n-k}(u)$. Zelevinsky has shown that $R$ is a polynomial ring in the generators $[L_{[i,j]}],\ i \le j$ associated with segments $[i,j]$. We denote by $M_{\mathbf{m}}$ the standard induced module corresponding to $\mathbf{m}$, so that $[M_{\mathbf{m}}] = \prod_{i \le j} [L_{[i,j]}]^{m_{ij}}$.

On the other hand, let $A^- = A[N_\infty^-]$ denote the ring of polynomial functions on the group $N_\infty^-$ of lower unitriangular $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-matrices with a finite number of non-zero off-diagonal entries. It is a polynomial ring in the coordinate functions $t_{ji},\ i < j$, and has a natural bialgebra structure. We put $t_{\mathbf{m}} := \prod_{i \le j} t_{j+1,i}^{m_{ij}}$. It is well known that $A^-$ and the enveloping algebra $U^- = U(\mathfrak{n}_\infty^-)$

are dual as bialgebras, the dual basis of $\{t_{\mathbf{m}}\}$ being a basis $\{E_{\mathbf{m}}\}$ of Poincaré-Birkhoff-Witt type. Let $\{G(\mathbf{m})\}$ be the canonical basis of $U^-$ obtained by specializing at $q=1$ the canonical basis of $U_q(\mathfrak{n}_\infty^-)$ defined by Lusztig [10], and let $\{G^*(\mathbf{m})\}$ be the basis of $A^-$ dual to $\{G(\mathbf{m})\}$. It follows from the $p$-adic analogue of the Kazhdan-Lusztig conjecture formulated by Zelevinsky [14] and proved by Ginzburg [6], and from the geometric description by Lusztig [10] of the coefficients of the expansion of $G(\mathbf{m})$ on $\{E_{\mathbf{m}}\}$ that

**Theorem 2** *The map $\Phi : R \longrightarrow A^-$ defined by $\Phi[M_{\mathbf{m}}] := t_{\mathbf{m}}$ is an isomorphism of bialgebras, and one has $\Phi[L_{\mathbf{m}}] = G^*(\mathbf{m})$. In particular, $L_{\mathbf{m}} \odot L_{\mathbf{n}}$ is simple if and only if $G^*(\mathbf{m})G^*(\mathbf{n})$ belongs to the dual canonical basis of $A^-$.*

This theorem in a dual formulation is due to Ariki [2], but here we want to emphasize that when $u$ is not a root of unity, the dual canonical basis is more natural, as demonstrated below.

Let $A_q^-$ be the $q$-deformation of $A^-$, and let $\{G_q^*(\mathbf{m})\}$ denote the basis dual to the canonical basis of $U_q(\mathfrak{n}_\infty^-)$. The multiplicative properties of $\{G_q^*(\mathbf{m})\}$ have been studied by Berenstein and Zelevinsky. They have formulated the following conjecture [3].

**Conjecture 3**

$$G_q^*(\mathbf{m})\, G_q^*(\mathbf{n}) = q^k\, G_q^*(\mathbf{p}) \text{ for } k \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad G_q^*(\mathbf{m})\, G_q^*(\mathbf{n}) = q^l G_q^*(\mathbf{n})\, G_q^*(\mathbf{m}) \text{ for } l \in \mathbb{Z}.$$

For $a \in \mathbb{Z}$, let $G^*(\lambda, a) = \Phi[S_\lambda(u^a)]$ be the element of the dual canonical basis corresponding to the module $S_\lambda(z)$ evaluated at $z = u^a$. The $G_q^*(\lambda, a)$ are distinguished elements of $\{G_q^*(\mathbf{m})\}$, namely they are the quantum flag minors of the matrix $\mathbf{T}_q = [t_{ji}^{(q)}]$ of the $q$-coordinate functions $t_{ji}^{(q)} \in A_q^-$ [3, 9]. Using the explicit description given in [9] of all pairs of $q$-commuting quantum flag minors, we prove the following theorem, from which Theorem 1 follows.

**Theorem 4** (i) *Conjecture 3 is true when $G_q^*(\mathbf{m}) = G_q^*(\lambda, a)$ and $G_q^*(\mathbf{n}) = G_q^*(\mu, b)$ are quantum flag minors.*
(ii) *The product $G_q^*(\lambda, a_1) \cdots G_q^*(\lambda, a_m)$ belongs to the dual canonical basis (up to a power of $q$) if and only if $|a_i - a_j| \notin \mathcal{E}_\lambda$ for all $i, j$.*

We note that, using the quantum affine Schur-Weyl duality between $\widehat{H}_n(u)$ and $U_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$ (with $u = v^2$) [5, 7, 4], one can deduce from Theorem 1 the form of the singularities of the trigonometric $R$-matrix $R_\lambda(z)$ associated to any simple evaluation module $V_\lambda(z)$ of $U_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$ [8].

**Corollary 5** *All singularities of $R_\lambda(z)$ are contained in the set $\mathcal{Z}_\lambda$.*

---

Soit $\widehat{H}_n(u)$ l'algèbre de Hecke affine associée à $GL(n)$. C'est l'algèbre sur $\mathbb{C}$ engendrée par des éléments inversibles $y_1, \ldots, y_n, T_1, \ldots, T_{n-1}$ soumis aux relations

$$\begin{array}{ll}
T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}, & 1 \le i \le m-2, \\
T_i T_j = T_j T_i, & |i-j| > 1, \\
(T_i - u)(T_i + 1) = 0, & 1 \le i \le m-1, \\
y_i y_j = y_j y_i, & 1 \le i, j \le m, \\
y_j T_i = T_i y_j, & j \ne i, i+1, \\
T_i y_i T_i = u\, y_{i+1}, & 1 \le i \le m-1.
\end{array}$$

Nous supposons que $u \in \mathbb{C}^*$ n'est pas une racine de l'unité. Notons $H_n(u)$ la sous-algèbre de $\widehat{H}_n(u)$ engendrée par $T_1, \ldots, T_{n-1}$, et pour $z \in \mathbb{C}^*$ soit $\mathrm{ev}_z : \widehat{H}_n(u) \longrightarrow H_n(u)$

l'homomorphisme d'évaluation défini par $\mathrm{ev}_z(T_i) = T_i$ et $\mathrm{ev}_z(y_1) = z$. Les $H_n(u)$-modules simples $S_\lambda$ sont paramétrés par les partitions $\lambda$ de $n$. Soit $S_\lambda(z)$ le $\widehat{H}_n(u)$-module déduit de $S_\lambda$ par évaluation en $z$. Notons $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, $\lambda' = (l_1, \ldots, l_k)$ la partition conjuguée de $\lambda$,

$$\mathcal{E}_\lambda = \{e = \lambda_i + l_j - i - j + 1,\ 1 \le i \le r,\ 1 \le j \le k\}$$

l'ensemble des longueurs d'équerres de $\lambda$, et posons $\mathcal{Z}_\lambda = \{u^{\pm e},\ e \in \mathcal{E}_\lambda\}$. Etant donnés des $\widehat{H}_{n_i}(u)$-modules de dimension finie $M_i,\ i = 1, 2$, nous désignons par

$$M_1 \odot M_2 := M_1 \otimes M_2 \uparrow_{\widehat{H}_{n_1} \otimes \widehat{H}_{n_2}}^{\widehat{H}_{n_1+n_2}}$$

le $\widehat{H}_{n_1+n_2}(u)$-module obtenu par induction.

**Théorème 1** *Soient $z_1, \ldots, z_m$ des complexes non nuls et $\lambda$ une partition de $n$. Le produit d'induction*

$$S_\lambda(z_1) \odot \cdots \odot S_\lambda(z_m)$$

*est un $\widehat{H}_{nm}(u)$-module simple si et seulement si $z_j/z_i \notin \mathcal{Z}_\lambda$ pour tous $i, j$.*

Pour démontrer le Théorème 1, nous nous ramenons à un problème de bases canoniques. Soit $R_n$ le groupe de Grothendieck complexifié de la catégorie $\mathcal{C}_n$ des $\widehat{H}_n(u)$-modules pour lesquels les générateurs $y_i$ de la sous-algèbre commutative maximale ont toutes leurs valeurs propres de la forme $u^k,\ k \in \mathbb{Z}$. D'après la classification de Zelevinsky [13], les modules simples $L_{\mathbf{m}}$ de $\mathcal{C}_n$ sont paramétrés par les multi-segments $\mathbf{m} = \sum_{i \le j} m_{ij}[i, j]$ à support dans $\mathbb{Z}$ tels que $\sum_{i<j} m_{ij}(j - i + 1) = n$. On pose $R = \bigoplus_{n \ge 0} R_n$ (où $R_0 = \mathbb{C}$). Zelevinsky a muni $R$ d'une structure de bigèbre, la multiplication correspondant au produit d'induction et la comultiplication aux diverses restrictions de $\widehat{H}_n(u)$ aux sous-algèbres paraboliques $\widehat{H}_k(u) \otimes \widehat{H}_{n-k}(u)$. Zelevinsky a montré que $R$ est l'anneau des polynômes en les générateurs $[L_{[i,j]}],\ i \le j$ associés aux segments $[i, j]$, et que la comultiplication est donnée sur ces générateurs par

$$c[L_{[i,j]}] = 1 \otimes [L_{[i,j]}] + \sum_{k=i}^{j-1} [L_{[i,k]}] \otimes [L_{[k+1,j]}] + [L_{[i,j]}] \otimes 1\,. \tag{1}$$

Zelevinsky a défini un ordre partiel $\trianglelefteq$ sur l'ensemble des multi-segments et a montré que les facteurs de composition du module induit standard $M_{\mathbf{m}}$ associé au multisegment $\mathbf{m}$ étaient les $L_{\mathbf{n}}$ avec $\mathbf{m} \trianglelefteq \mathbf{n}$. On a donc dans $R$

$$[M_{\mathbf{m}}] = \sum_{\mathbf{m} \trianglelefteq \mathbf{n}} K_{\mathbf{mn}}[L_{\mathbf{n}}]\,, \tag{2}$$

pour certains entiers positifs $K_{\mathbf{mn}}$. Les multi-segments paramètrent également les orbites nilpotentes graduées $\mathcal{O}_{\mathbf{m}}$, (c'est-à-dire les classes d'isomorphismes de représentations du carquois de type $A_\infty$), et on a $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{n}} = \coprod_{\mathbf{m} \trianglelefteq \mathbf{n}} \mathcal{O}_{\mathbf{m}}$. Zelevinsky [14] a formulé un analogue $p$-adique de la conjecture de Kazhdan-Lusztig :

$$K_{\mathbf{mn}} = \sum_{i \ge 0} \dim \mathcal{H}^i(\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{n}})_{\mathbf{m}}\,, \tag{3}$$

où $\mathcal{H}^i(\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{n}})_{\mathbf{m}}$ désigne la tige en un point $x \in \mathcal{O}_{\mathbf{m}}$ du $i$-ème faisceau de cohomologie d'intersection de la variété $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{n}}$. Cette conjecture a été démontrée par Ginzburg (*cf.* [6], Theorem 8.6.23).

Par ailleurs, soit $A^- = A[N_\infty^-]$ l'anneau des fonctions polynomiales sur le groupe $N_\infty^-$ des $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-matrices unitriangulaires inférieures ayant un nombre fini de coefficients non-nuls hors de la diagonale. C'est l'anneau de polynômes en les fonctions coordonnées $t_{ji},\ i<j$. La comultiplication naturelle est donnée sur ces générateurs par

$$\delta t_{ji} = t_{ji}\otimes 1 + \sum_{k=i+1}^{j-1} t_{jk}\otimes t_{ki} + 1\otimes t_{ji}\,. \tag{4}$$

Au multi-segment $\mathbf{m} = \sum_{i\le j} m_{ij}[i,j]$ nous associons le monôme $t_\mathbf{m} := \prod_{i\le j} t_{j+1,i}^{m_{ij}}$. On sait que la bigèbre $A^-$ est duale de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{n}_\infty^-)$ de l'algèbre de Lie de $N_\infty^-$. La base duale de $\{t_\mathbf{m}\}$ est la base de Poincaré-Birkhoff-Witt $E_\mathbf{m} := \overrightarrow{\prod_{[i,j]}} E_{j+1,i}^{m_{ij}}/m_{ij}!$, où les $E_{j+1,i}$ sont les unités matricielles, et les segments $[i,j]$ sont ordonnés par

$$[i,j]<[k,l] \quad\Longleftrightarrow\quad (j<l \text{ ou } (j=l \text{ et } i<k)).$$

Soit $\{G(\mathbf{m})\}$ la base canonique de $U(\mathfrak{n}_\infty^-)$ obtenue en spécialisant à $q=1$ la base canonique de $U_q(\mathfrak{n}_\infty^-)$ définie par Lusztig [10]. D'après l'équation (3) et [10], 10.7, on a

$$G(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{m}\,\trianglelefteq\,\mathbf{n}} K_{\mathbf{mn}}\, E_\mathbf{m}\,. \tag{5}$$

Notons $\{G^*(\mathbf{m})\}$ la base de $A^-$ duale de $\{G(\mathbf{m})\}$. Il résulte de (1) (2) (4) (5):

**Théorème 2** *L'application $\Phi : R \longrightarrow A^-$ définie par $\Phi[M_\mathbf{m}] := t_\mathbf{m}$ est un isomorphisme de bigèbres, et on a $\Phi[L_\mathbf{m}] = G^*(\mathbf{m})$. En particulier, le produit d'induction $L_\mathbf{m}\odot L_\mathbf{n}$ est simple si et seulement si le produit $G^*(\mathbf{m})G^*(\mathbf{n})$ appartient à la base canonique duale de $A^-$.*

Ce théorème, sous une forme duale, est dû à Ariki [2], mais nous voudrions faire remarquer ici que lorsque $u$ n'est pas une racine de l'unité, la base canonique duale est plus naturelle, ainsi qu'on va le voir maintenant.

Soit $A_q^-$ la $q$-déformation de $A^-$, et notons $\{G_q^*(\mathbf{m})\}$ la base duale de la base canonique de $U_q(\mathfrak{n}_\infty^-)$. D'après [11] 11.5 (b), si l'on écrit

$$G_q^*(\mathbf{m})\, G_q^*(\mathbf{n}) = \sum_\mathbf{p} \alpha_{\mathbf{mn}}^{\mathbf{p}}(q)\, G_q^*(\mathbf{p})\,, \tag{6}$$

on a $\alpha_{\mathbf{mn}}^{\mathbf{p}}(q)\in\mathbb{N}[q,q^{-1}]$. Donc

$$G^*(\mathbf{m})\, G^*(\mathbf{n}) = G^*(\mathbf{p}) \quad\Longleftrightarrow\quad G_q^*(\mathbf{m})\, G_q^*(\mathbf{n}) = q^k\, G_q^*(\mathbf{p}) \text{ pour } k\in\mathbb{Z}.$$

Les propriétés multiplicatives de $\{G_q^*(\mathbf{m})\}$ ont été étudiées par Berenstein et Zelevinsky. Ils ont en particulier formulé la conjecture suivante [3].

**Conjecture 3**

$$G_q^*(\mathbf{m})\, G_q^*(\mathbf{n}) = q^k\, G_q^*(\mathbf{p}) \textit{ pour } k\in\mathbb{Z} \quad\Longleftrightarrow\quad G_q^*(\mathbf{m})\, G_q^*(\mathbf{n}) = q^l G_q^*(\mathbf{n})\, G_q^*(\mathbf{m}) \textit{ pour } l\in\mathbb{Z}.$$

Pour $a \in \mathbb{Z}$, notons $G^*(\lambda, a) = \Phi[S_\lambda(u^a)]$ les vecteurs de la base canonique duale correspondant aux modules d'évaluation en $z = u^a$. Les $G_q^*(\lambda, a)$ forment un sous-ensemble distingué de la base canonique duale : ce sont les mineurs quantiques drapeaux de la matrice $\mathbf{T}_q = [t_{ji}^{(q)}]$ des $q$-fonctions coordonnées $t_{ji}^{(q)} \in A_q^-$ [3, 9]. En nous appuyant sur la description explicite donnée dans [9] de toutes les paires de mineurs quantiques drapeaux qui commutent à une puissance de $q$ près, nous obtenons le théorème suivant qui entraîne le Théorème 1.

**Théorème 4** (i) *La Conjecture 3 est vraie lorsque* $G_q^*(\mathbf{m}) = G_q^*(\lambda, a)$ *et* $G_q^*(\mathbf{n}) = G_q^*(\mu, b)$ *sont des mineurs quantiques drapeaux.*
(ii) *Le produit* $G_q^*(\lambda, a_1) \cdots G_q^*(\lambda, a_m)$ *appartient à la base canonique duale (à une puissance de q près) si et seulement si* $|a_i - a_j| \notin \mathcal{E}_\lambda$ *pour tous* $i, j$.

**Remarque** Il est raisonnable de conjecturer que $L_\mathbf{m} \odot L_\mathbf{n}$ est irréductible si et seulement si $L_\mathbf{m} \odot L_\mathbf{n}$ est isomorphe à $L_\mathbf{n} \odot L_\mathbf{m}$ (*cf.* [1], [12]). Il serait intéressant d'éclaircir le lien entre cette conjecture et la Conjecture 3 de Berenstein et Zelevinsky.

Soit $U_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$ l'algèbre affine quantique de paramètre $v = u^{1/2}$. Soit $\lambda$ une partition de longueur $\le N$. L'homomorphisme d'évaluation en $z \in \mathbb{C}^*$ de $U_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$ vers $U_v(gl_N)$ permet de munir le $U_v(gl_N)$-module simple $V_\lambda$ de plus haut poids $\lambda$ d'une structure de $U_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$-module de dimension finie, noté $V_\lambda(z)$ [8]. En utilisant la dualité de Schur-Weyl affine quantique [5, 7, 4], on déduit du Théorème 1 que si pour tous $i, j$ on a $z_j/z_i \notin \mathcal{Z}_\lambda$, alors le produit tensoriel $V_\lambda(z_1) \otimes \cdots \otimes V_\lambda(z_m)$ est un $U_v(\widehat{\mathfrak{sl}}_N)$-module irréductible. Soit $R_\lambda(z)$ la $R$-matrice trigonométrique associée à $V_\lambda(z)$ [8]. C'est une fonction rationnelle de $z$ à valeurs dans End $(V_\lambda \otimes V_\lambda)$, qui est solution de l'équation de Yang-Baxter quantique

$$R_\lambda^{12}(z_1/z_2)\, R_\lambda^{13}(z_1/z_3)\, R_\lambda^{23}(z_2/z_3) = R_\lambda^{23}(z_2/z_3)\, R_\lambda^{13}(z_1/z_3)\, R_\lambda^{12}(z_1/z_2)$$

pour des nombres complexes génériques $z_1$, $z_2$, $z_3$.

**Corollaire 5** *Les singularités de* $R_\lambda(z)$ *sont contenues dans l'ensemble* $\mathcal{Z}_\lambda$.

**Remerciements.** Ce travail est né de conversations avec M. Nazarov, lors d'une visite de B. L. à l'Université de York en 1998. Il a été continué pendant notre séjour au R.I.M.S. de Kyoto dans le cadre du projet 1998 *"Combinatorial methods in representation theory"* organisé par M. Kashiwara, K. Koike, S. Okada, I. Terada, H.-F. Yamada. Nous remercions A. Lascoux et M. Nazarov pour de précieuses et stimulantes discussions, et les Universités de York et de Kyoto pour leur accueil chaleureux.

# References

[1] T. Akasaka, M. Kashiwara, Finite-dimensional representations of quantum affine algebras, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 33 (1997), 839–867.

[2] S. Ariki, On the decomposition numbers of the Hecke algebra of $G(m, 1, n)$, *J. Math. Kyoto Univ.* 36 (1996), 789–808.

[3] A. Berenstein, A. Zelevinsky, String bases for quantum groups of type $A_r$, *Advances in Soviet Math.* (Gelfand's seminar) 16 (1993), 51-89.

[4] V. Chari, A. Pressley, Quantum affine algebras and affine Hecke algebras, Pacific J. Math. 174 (1996), 295-326.

[5] I. V. Cherednik, A new interpretation of Gelfand-Tzetlin bases, *Duke Math. J.*, 54 (1987), 563-577.

[6] N. Chriss, V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Birkhauser 1997.

[7] V. Ginzburg, N. Yu Reshetikhin, E. Vasserot, Quantum groups and flag varieties, *A.M.S. Contemp. Math.* 175 (1994), 101-130.

[8] M. Jimbo, A $q$-analogue of $U(gl(n+1))$, Hecke algebra and the Yang-Baxter equation, *Lett. Math. Phys.* 11, 1986, 247-252.

[9] B. Leclerc, A. Zelevinsky, Quasicommuting families of quantum Plücker coordinates, *Advances in Math. Sciences* (Kirillov's seminar), AMS Translations 181 (1998), 85-108.

[10] G. Lusztig, Canonical bases arising from quantized enveloping algebras, I, *J. Amer. Math. Soc.* 3 (1990), 447-498.

[11] G. Lusztig, Quivers, perverse sheaves and quantized enveloping algebras, *J. Amer. Math. Soc.* 4 (1991), 365-421.

[12] M. Nazarov, V. Tarasov, On irreducibility of tensor products of Yangian modules, *Internat. Math. Res. Notices* 3 (1998), 125–150.

[13] A. Zelevinsky, Induced representations of reductive $p$-adic groups II, *Ann. Sci. E.N.S.* 13 (1980), 165–210.

[14] A. Zelevinsky, A $p$-adic analog of the Kazhdan-Lusztig conjecture, *Funct. Anal. Appl.* 15 (1981), 83-92.

B. Leclerc : Département de Mathématiques, Université de Caen, Campus II,
Bld Maréchal Juin, BP 5186, 14032 Caen cedex, France
email : `leclerc@math.unicaen.fr`

J.-Y. Thibon : Institut Gaspard Monge, Université de Marne-la-Vallée,
Champs-sur-Marne, 77454 Marne-la-Vallée cedex 2, France
email : `jyt@weyl.univ-mlv.fr`